Quantentheorie II

Prof. Klaus Richter Dr. Andrea Donarini

Blatt 2

1. WKB Methode

Gegeben sei die eindimensionale stationäre Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

mit einem Potential $V(x)$, das nur ein einziges lokales Minimum in x aufweist. Wir bezeichnen mit a und b die beiden Umkehrpunkte der klassischen Bewegung zur Energie E, welche durch $V(a) = V(b) = E$ definiert sind. Der semiklassische WKB-Ansatz besteht darin, die Eigenfunktion $\psi(x)$ zur Energie E im klassisch erlaubten Bereich $a < x < b$ als Linearkombination von

$$\phi_\pm(x) = \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \exp\left(\pm\frac{i}{\hbar}\int_{x_0}^{x} p(x')dx'\right) \quad \text{mit} \quad p(x) = \sqrt{2m(E - V(x))}$$

für ein festes $x_0 \in [a, b]$ darzustellen. Damit $\psi(x)$ im verbotenen Bereich nicht exponentiell divergiert, muss gelten:

$$\psi(x) = \frac{A}{\sqrt{p(x)}} \cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_a^x p(x')dx' - \frac{\pi}{4}\right), \quad \text{sowie} \tag{1}$$

$$\psi(x) = \frac{B}{\sqrt{p(x)}} \cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_x^b p(x')dx' - \frac{\pi}{4}\right), \tag{2}$$

wobei A und B komplexe Amplituden bezeichnen.

a) Zeigen Sie, dass sich (1) und (2) nur erfüllen lassen, wenn

$$\int_a^b \sqrt{2m(E - V(x))}dx = \pi\hbar(n + 1/2)$$

für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

b) Im einem Potential mit einer harten (linken) Wand bei $x = 0$ ist $a = 0$ für alle E, und die Bedingung (1) wird durch die Randbedingung $\psi(0) = 0$ ersetzt. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_0^b \sqrt{2m(E - V(x))}dx = \pi\hbar(n + 3/4)$$

für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelten muss.

c) • Berechnen Sie mit dieser Formel die semiklassischen Eigenenergien im Dreieckspotential

$$V(x) = \begin{cases} \infty : x < 0 \\ \alpha x : x \geq 0 \end{cases}$$

mit $\alpha > 0$.

(3 Punkte)

2. Baker-Hausdorff Gleichung

Ist A ein linearer Operator, dann kann man das Exponential dieses Operators so definieren:

$$\mathrm{e}^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}.$$

a) • Beweisen Sie die sogenannte Baker-Campbell-Hausdorff-Formel für zwei Operatoren A, B

$$\mathrm{e}^A B \mathrm{e}^{-A} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}[A, B]_m$$

mit $[A, B]_m = [A, [A, B]_{m-1}]$ und $[A, B]_0 = B$.
Hinweis: Stellen Sie die Taylor-Entwicklung der Hilfsgrösse $A(s) \equiv \mathrm{e}^{sA} B \mathrm{e}^{-sA}$ ($s \in \mathbb{R}$) im Punkte $s = 0$ auf. Dazu benötigen Sie die Ableitung der Operator-Exponentialfunktion: $(\mathrm{d}/\mathrm{d}s)\mathrm{e}^{\pm sA} = \pm A \mathrm{e}^{\pm sA}$. Werten Sie diese Entwicklung dann an der Stelle $s = 1$ aus, um $\mathrm{e}^A B \mathrm{e}^{-A}$ zu erhalten.

(3 Punkte)

b) Zeigen Sie dass, falls $[A, [A, B]] = 0$ und $[B, [B, A]] = 0$ gilt, dann die Formel

$$\mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B \mathrm{e}^A \mathrm{e}^{[A,B]}$$

folgt. Diese Formel wird auch als Baker-Hausdorff-Formel bezeichnet und ist wichtig für die Rechnung mit Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren.

Frohes Schaffen!

Abgabe der Hausaufgaben (markiert durch •) bis Montag 29.10. um 10 Uhr.