Universität Regensburg Wintersemester 07-08

Quantentheorie II

Prof. Klaus Richter Dr. Andrea Donarini

Blatt 3

---

1. Instantane Potentialänderungen

Durch einen Beta-Zerfall kann das Tritium-Atom (Wasserstoff mit zwei Neutronen) instantan in ein positiv geladenes Helium-Ion übergehen. Auf atomaren Zeitskalen, die für die Elektronendynamik relevant sind, verläuft dieser Prozess quasi instantan, d.h. das Elektron "sieht" eine plötzliche Erhöhung der Kernladung zum Zeitpunkt $t = t_0$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Elektron nach dem Beta-Zerfall im Grundzustand von He^+ vorzufinden, wenn es vor dem Beta-Zerfall im Grundzustand von Tritium war?

2. Operatoren im Heisenbergbild

Im Heisenbergbild sind die Zustände $|\psi_\mathrm{H}\rangle$ eines Systems stationär, wohingegen die Observablen A_H zeitabhängig sind und sich gemäß

$$i\hbar \frac{dA_\mathrm{H}}{dt} = [A_\mathrm{H}(t), H(t)]$$

mit der Zeit entwickeln. $H(t)$ bezeichnet dabei den (im allgemeinen explizit zeitabhängigen) Hamiltonoperator des Systems.

a) Zeigen Sie, dass Orts- und Impulsoperatoren im Schrödinger- und Heisenbergbild dieselben kanonischen Vertauschungrelationen erfüllen:

$$[X_\mathrm{H}(t), P_\mathrm{H}(t)] = [X_S, P_S] = i\hbar \qquad \forall t$$

b) Zeigen Sie dass, für einen Hamiltonoperator der Form

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(X,t)$$

die folgende Gleichungen gelten (Ehrenfest Theorem):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X_\mathrm{H}(t) = \frac{1}{m} P_\mathrm{H}(t)\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_\mathrm{H}(t) = -\frac{\partial V}{\partial x}(X_\mathrm{H}(t), t)\,.$$

Gegeben sei der zeitabhängige Hamiltonoperator eines harmonischen Oszillators

$$H(t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 (x - vt)^2\,,$$

dessen Kraftzentrum sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit v bewegt.

c) • Bestimmen Sie die Zeitentwicklung vom Orts- und Impulsoperator X_H bzw. P_H im Heisenbergbild. (3 Punkte)

d) • Zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ sei das System im Grundzustand von $H(0)$. Berechnen Sie die Zeitentwicklung der Orts- und Impulserwartungswerte $\langle X_\mathrm{H}\rangle$ bzw. $\langle P_\mathrm{H}\rangle$. Skizzieren Sie $\langle X_\mathrm{H}\rangle$ als Funktion von t. (2 Punkte)

3. Zeitabhängige Störungstheorie

• Die Bewegung eines geladenen Teilchens soll als harmonischer Oszillator beschreibbar sein. Diese soll durch ein zeitabhängiges, homogenes elektrisches Feld

$$E(t) = \frac{A}{\sqrt{\pi}\tau} \mathrm{e}^{-(t/\tau)^2}$$

gestört werden, wo A und τ Konstanten sind. Der harmonische Oszillator befinde sich zun Zeitpunkt $t = -\infty$ im Grundzustand. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, ihn bei $t = +\infty$ im 1. angeregten Zustand zu finden?
Hinweis: Benutzen Sie die Störungstheorie 1. Ordnung. Verwenden Sie:

$$\langle n| X |n+1\rangle = \langle n+1| X |n\rangle = \sqrt{\frac{(n+1)\hbar}{2m\omega}} \, ,$$

wo $|n\rangle$ und $|n+1\rangle$ Eigenvektoren des harmonischen Oszillators sind und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \mathrm{e}^{i\beta x - \alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \, \mathrm{e}^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} \, .$$

(5 Punkte)

Frohes Schaffen!

Abgabe der Hausaufgaben (markiert durch •) bis Montag 5.11. um 10 Uhr.