

Quantentheorie II

Prof. Klaus Richter

Dr. Andrea Donarini

Blatt 7

1. Ideales Fermigas im harmonischen Oszillator

Gegeben seien N nichtwechselwirkende identische Fermionen mit Masse m und Spin $1/2$, die sich im Potential eines isotropen dreidimensionalen harmonischen Oszillators mit Frequenz ω befinden.

- a) • Bestimmen Sie für $N \gg 1$, wie die Gesamtenergie des Grundzustands mit der Zahl N der Fermionen anwächst. Sie können die dabei auftretenden Summen über Quantenzahlen durch Integrale ersetzen. (3 Punkte)
- b) Bestimmen Sie die fünf niedrigsten “magischen” Besetzungszahlen des harmonischen Oszillators — d.h. diejenigen Teilchenzahlen N_1, N_2, \dots , bei denen im Grundzustand jedes Energieniveau des ungestörten harmonischen Oszillators entweder vollständig gefüllt oder völlig leer ist.

2. Weiße Zwerge

Ein weißer Zwerg besteht aus einem Gas aus Elektronen und Heliumkernen, in dem der “Fermi-Druck” der Elektronen den Gravitationsdruck kompensiert.

- a) • Berechnen Sie die gesamte kinetische Energie der Elektronen als Funktion der Gesamtzahl N der Elektronen im weißen Zwerg sowie des Sternradius R . Gehen Sie dabei von nichtwechselwirkenden Elektronen aus und nehmen Sie zur Vereinfachung der Rechnung an, dass sich die Elektronen in einem potentialfreien Kubus mit periodischen Randbedingungen bewegen, dessen Volumen mit dem Volumen des weißen Zwergs übereinstimmt. (1 Punkt)
- b) • Berechnen Sie die gesamte klassische Gravitationsenergie als Funktion des Sternradius und der Zahl der Elektronen. Nehmen Sie dabei an, dass die Massendichte der Helium-Kerne im Sterninnern konstant ist. (2 Punkte)

Hinweis:
$$\int d^3r_1 \int d^3r_2 \frac{f(|\vec{r}_1|, |\vec{r}_2|)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \int d^3r_1 \int d^3r_2 \frac{f(|\vec{r}_1|, |\vec{r}_2|)}{\max\{|\vec{r}_1|, |\vec{r}_2|\}}$$

- c) • Bestimmen Sie unter Verwendung von Teilaufgabe a) und b) den Gleichgewichtsradius eines weißen Zwergs. Welcher Wert würde sich für einen Stern mit der Masse der Sonne ergeben? (2 Punkte)

- d) Was ändert sich an der gesamten kinetischen Energie, wenn man die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$E = \sqrt{(m_e c^2)^2 + p^2 c^2}$$

für die Elektronen berücksichtigt und $p_F \gg m_e c$ für den Fermi-Impuls p_F annimmt (m_e ist die Elektronenmasse)?

- e) Bis zu welcher kritischen Masse wäre ein weißer Zwerg stabil?

Frohes Schaffen!