Universität Regensburg Wintersemester 07-08

Quantentheorie II

Prof. Klaus Richter Dr. Andrea Donarini

Blatt 12

1. Optisches Theorem

• Es sei bei reiner s-Wellen-Streuung der differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = a$$

gemessen worden. Bestimmen Sie die komplexe Streuamplitude $f(\theta)$. (2 Punkte)

2. Klein-Gordon-Gleichung mit Coulomb-Potential

In Anwesenheit eines externen elektrostatischen Potentials der Form

$$V(r) = -\frac{e^2}{r}$$

ist die Klein-Gordon-Gleichung durch

$$\left[\frac{1}{c^2}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - V(r)\right)^2 + \hbar^2\Delta - m^2c^2\right]\psi(\vec{r},t) = 0$$

gegeben.

a) • Zeigen Sie, dass sich die stationären normierbaren Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung in der Form

$$\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{r}\chi_\ell(r)Y_{\ell m}(\theta,\varphi)e^{-iEt/\hbar}$$

schreiben lassen, wobei $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ die Kugelflächenfunktionen bezeichnen. (2 Punkte)

b) • Zeigen Sie, dass die radiale Funktion $\chi_\ell(r)$ die Gleichung

$$\frac{d^2}{dr^2}\chi_\ell(r) + \left(\frac{[E - V(r)]^2 - E_0^2}{\hbar^2c^2} - \frac{\lambda}{r^2}\right)\chi_\ell(r) = 0$$

erfüllt und geben Sie die darin auftretenden Konstanten E_0 und λ an. (2 Punkte)

c) Bestimmen Sie das diskrete Energiespektrum der gebundenen Zustände. Sie können dabei auf die bereits bekannte Herleitung des nichtrelativistischen Wasserstoff-Spektrums mit der Schrödinger-Gleichung zurückgreifen. Welche Eigenenergien würden sich im nichtrelativistischen Grenzfall ergeben?

3. Erhaltungsgrößen in der Dirac-Theorie

Der Hamiltonoperator der Dirac-Theorie ist durch $H = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2$ gegeben, wobei β und α_k die Matrizen

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \qquad \alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

und σ_k die Pauli-Matrizen sind. Bestimmen Sie die Kommutatoren von H mit den Operatoren

$$p^2 \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}, \qquad \vec{p} \cdot \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix},$$

wobei $\mathbb{I}$ die 2×2 Einheitsmatrix, und $\vec{\sigma}$ den Vektor der Pauli-Matrizen bezeichnen. Welche dieser Operatoren sind demnach Erhaltungsgrößen in der Dirac-Theorie?

Frohes Schaffen!